Compitino di MD
5 novembre 2014

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. I testi degli esercizi sono su fogli separati su cui vanno scritte le rispettive soluzioni: **scrivere il nome su ciascun foglio**. Mettere entro un riquadro bene evidenziato la soluzione, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1.
Trovare il più piccolo valore $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$, valga

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 \leq \frac{1}{2} n^4.$$

Cominciamo ad esaminare la disuguaglianza per valori piccoli di n.

$\underline{n=0}$ $\quad 0 \leq 0$ vero

$\underline{n=1}$ $\quad 1 \leq \frac{1}{2}$ falso $\qquad \underline{n=2}$ $\quad 1+2^3 \leq \frac{1}{2} 2^4$ FALSO

$\underline{n=3}$ $\quad 1+2^3+3^3 \leq \frac{1}{2} 81$ VERO

Mostriamo ora per induzione che la ~~tale~~ disug vale $\forall n \geq 3$

Abbiamo già verificato il caso $n=3$.

Mostriamo ora che se $n \geq 3$ e vale $\sum_{i=0}^{n} i^3 \leq \frac{1}{2} n^4$ allora vale anche $\sum_{i=0}^{n+1} i^3 \leq \frac{1}{2}(n+1)^4$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3 \overset{\text{IP IND}}{\leq} \frac{1}{2} n^4 + (n+1)^3 \overset{?}{\leq} \frac{1}{2}(n+1)^4 \quad (*)$$

L'ultima disug vale $\iff \frac{1}{2}(n+1)^4 - \frac{1}{2}n^4 - (n+1)^3 \geq 0$

$\iff \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{2}4n^3 + \frac{1}{2}6n^2 + \frac{1}{2}4n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n^4 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1 \geq 0$

$\iff n^3 \geq n + \frac{1}{2}$. Per $n \geq 3$ si ha $n^3 \geq 3^2 n \geq n + \frac{1}{2}$

quindi la disug (*) è sempre verificata $\forall n \geq 3$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

Esercizio 2. Sia $\mathbb{N}_{100} = \{1, 2, ..., 100\}$.
a) Quanti sono i sottoinsiemi A di 3 elementi di $\mathbb{N}_{100}$ tali che la somma degli elementi di A sia pari?
b) Quanti sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{100}$ che contengono almeno 3 numeri pari?
c) Quanti sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{100}$ che contengono esattamente 3 numeri pari ed esattamente un multiplo di 5 ?
d) Quante sono le terne ordinate (n, m, u) di elementi di $\mathbb{N}_{100}$ il cui prodotto fa 100?

Sia $P = \mathbb{N}_{100} \cap \{pari\}$ $D = \{\mathbb{N}_{100} \cap \{dispari\}$ - Chiaramente $|P| = |D| = 50$

a) Dobbiamo contare gli insiemi A della forma

$\{p_1, p_2, p_3\}$ $p_1, p_2, p_3 \in P$ $\left(\text{sono } \binom{50}{3}\right)$

e quelli della forma:

$\{p, d_1, d_2\}$ $p \in P$ $d_1, d_2 \in D$ $\left(\text{sono } \binom{50}{1}\binom{50}{2}\right)$

In Tutto $\binom{50}{3} + \binom{50}{1}\binom{50}{2}$

b) $X = \{A \subset \mathbb{N}_{100} \mid |A \cap P| \geq 3\} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_{100}) - \{A \in \mathbb{N}_{100} \mid |A \cap P| \leq 2\}$

$\# X = \# \mathcal{P}(\mathbb{N}_{100}) - \# \{A \subset \mathbb{N}_{100} \mid |A \cap P| = 0, 1, 2\} =$

$= 2^{100} - \left(\binom{50}{0} + \binom{50}{1} + \binom{50}{2}\right) 2^{50}$ ← # scelte per $A \cap D$ (che è libero)

scelte per $A \cap P$ di card 0 — di card = 1 — di card = 2

c) $\mathbb{N}_{100} = A \cup B \cup C \cup D$

$A = \{x \in \mathbb{N}_{100} \mid 2 \nmid x \wedge 5 \nmid x\}$ $B = \{x \in \mathbb{N}_{100} \mid 2 | x \wedge 5 \nmid x\}$

$C = \{x \in \mathbb{N}_{100} \mid 2 \nmid x \wedge 5 | x\}$ $D = \{x \in \mathbb{N}_{100} \mid 2 | x \text{ e } 5 | x\}$

$\# A = 40$ $\# B = 40$ $\# C = 10$ $\# D = 10$

~~[illegible]~~ dell'insieme divisibile per 5 [illegible] $\in C$ $\in D$

Se $x \in C$ $\Rightarrow$ ~~A contiene 3 el di B e un numero qualsiasi di el~~ di

Gli insiemi che dobbiamo contare possono essere di 2 Tipi

① $\{c, b_1, b_2, b_3, a_1, \dots, a_k\}$ con $c \in C$ $b_1, b_2, b_3 \in B$ e un numero qualsiasi di el di A

$\longrightarrow \binom{10}{1}\binom{40}{3} 2^{40}$ scelte

② $\{d, b_1, b_2, a_1, \dots, a_k\}$ con $d \in D$ $b_1, b_2 \in B$ e un numero qualsiasi di el di A $\longrightarrow \binom{10}{1}\binom{40}{2} 2^{40}$ scelte

In Tutto $\binom{10}{1}\binom{40}{3} 2^{40} + \binom{10}{1}\binom{40}{2} 2^{40}$

d) $n \mid 10 = 2^2 5^2 \iff n = 2^a 5^b$ $\quad 0 \le a \le 2$, $0 \le b \le 2$

$\Rightarrow n \cdot m \cdot u = 2^2 5^2 \iff n = 2^a 5^b$, $m = 2^c 5^d$, $u = 2^e 5^f$ $\quad 0 \le a, b, c, d, e, f \le 2$

$$\begin{cases} a + c + e = 2 \\ b + d + f = 2 \end{cases}$$

Occorre quindi contare le ~~[illegible]~~ Terne ordinate di interi positivi che risolvono l'eq $x + y + z = 2$

Sappiamo che quante sono $\binom{4}{2}$

Le sol del sistema sono quindi $\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 36$

Esercizio 3. Consideriamo i due seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Data l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L(x, y, z) = (x + y, x + z, x + z)$ trovare una base di Ker L e Im L e scrivere la matrice $[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ associata alla base $\mathcal{C}$ in partenza e alla base $\mathcal{B}$ in arrivo.

La matrice associata all'applicazione lineare L rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo è

$$A = [L]^{\{e_1, e_2, e_3\}}_{\{e_1, e_2, e_3\}} = \left([Le_1]\, [Le_2],\ [Le_3] \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riduciamo a gradini con Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

base di Im $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

la base di Ker L si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ y = z \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = z \\ z = z \end{cases}$$

base Ker $L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathbb{R}^3_{\mathcal{C}} \xrightarrow[id]{C} \mathbb{R}^3_{\{e_i\}} \xrightarrow[L]{A} \mathbb{R}^3_{\{e_i\}} \xrightarrow[id]{B} \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}}$$

$$[L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = BAC \quad \text{con} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo B

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } [L]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & 0 \\ 10/3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$